Целочисленные циклические многоугольники, вписанные в окружность с целым радиусом

Георгий Гуляев

2 июня 2026 г.

1. Введение

В рассматриваемой нами области математики, лежащей на стыке геометрии и теории чисел, исторически сложилась определенная терминология $[1, 2, 3]$.

Циклический многоугольник (Cyclic Polygon) - многоугольник, все вершины которого лежат на одной окружности, называемой описанной окружностью.

Многоугольник Герона (Heron Polygon) - многоугольник, у которого длины всех сторон, всех диагоналей и площадь выражаются целыми числами.

Многоугольник Брахмагупты (Brahmagupta Polygon) - циклический многоугольник, который также является многоугольником Герона.

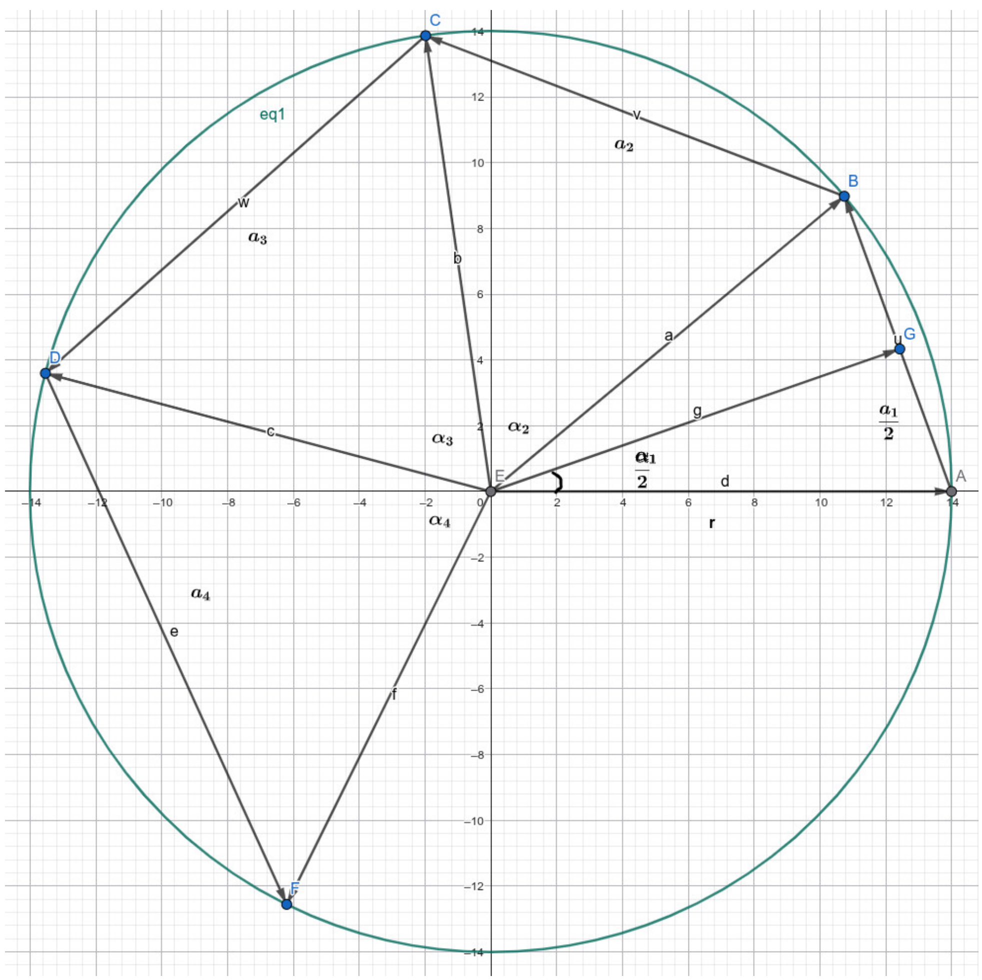
Во всех опубликованных работах ($[1, 2, 3]$, - как пример), как правило, изучаются многоугольники с рациональными или целыми не обязательно разными сторонами, рациональными или целыми диагоналями и площадью, исследуется полиномиальная зависимость между длинами сторон и площадью и так далее.

В данной работе мы будем находить и строить циклические n-угольники с разными целыми сторонами $a_1, a_2, ..., a_n, a_k \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, ..., n\}, a_1 < a_2 < ... < a_n$, и целым радиусом описанной окружности $r \in \mathbb{N}$.

При этом, диагонали и площади таких многоугольников будут, вообще говоря, иррациональны. Рациональными или целыми они могут оказаться только в отдельных редких случаях.

С точки зрения данной статьи, задача состоит в том, чтобы найти условия, при которых можно разместить ломаную с целочисленными длинами звеньев $a_1, a_2, ..., a_n$ и вершинами углов на окружности целого радиуса r так, чтобы она замкнулась в n-угольник (последняя вершина совпала бы с первой).

2. Общие соображения и теоремы



Рассмотрим общий случай выпуклого n-угольника со сторонами $a_1, a_2, ..., a_n$, вписанного в окружность радиуса r. Проведем из его центра радиусы в каждую вершину и обозначим углы, с вершинами в центре окружности, через $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, соответственно сторонам $a_1, a_2, ..., a_n$.

Определяющим условием того, что все вершины многоугольника лежат на описанной окружности является равенство 2π суммы всех центральных углов:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 2\pi \tag{1}$$

Опустив перпендикуляры из центра окружности на стороны многоугольника, из полученных прямоугольных треугольников выводим соотношения:

$$sin(\frac{\alpha_k}{2}) = \frac{a_k}{2r}, k = \{1, 2, ..., n\}$$

Таким образом, равенство (1) оказывается эквивалентно следующему:

$$arcsin(\frac{a_1}{2r}) + arcsin(\frac{a_2}{2r}) + ... + arcsin(\frac{a_n}{2r}) = \pi \tag{2}$$

Рассмотрим теперь n комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ с рациональными мнимыми частями $\frac{a_1}{2r}, \frac{a_2}{2r}, ..., \frac{a_n}{2r}$, лежащих на единичной окружности:

$$z_1 = \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4r^2}} + \frac{a_1}{2r}i, z_2 = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{4r^2}} + \frac{a_2}{2r}i, ..., z_n = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}} + \frac{a_n}{2r}i \tag{3}$$

Учитывая, что модули $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$, а аргументы $z_1, z_2, ..., z_n$ равны соответственно $arcsin(\frac{a_1}{2r}), arcsin(\frac{a_2}{2r}), ..., arcsin(\frac{a_n}{2r})$, перепишем наши числа в показательной форме:

$$z_1 = e^{arcsin(\frac{a_1}{2r})i}, z_2 = e^{arcsin(\frac{a_2}{2r})i}, ..., z_n = e^{arcsin(\frac{a_n}{2r})i}$$

Теперь нетрудно заметить, что равенство (2) эквивалентно тому, что произведение комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ должно быть равно -1.

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = -1 \tag{4}$$

Действительно,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = e^{arcsin(\frac{a_1}{2r}) + arcsin(\frac{a_2}{2r}) + ... + arcsin(\frac{a_n}{2r})} = e^{i\pi} = -1$$

То есть, если выполняется (2), то выполняется (4) и обратно, если выполняется (4) то выполняется (2): $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi) = -1 => \varphi = \pi$ (в условиях нашей задачи предполагаем, что $0 < \varphi \leq \pi$).

Таким образом, мы получили фундаментальное уравнение (4) для нахождения n-угольников с целыми длинами сторон, вписанных в окружности с целым радиусом. Теперь нужно исследовать, как добиться его выполнения в тех или иных конкретных случаях.

Для дальнейшего нам потребуется доказать ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Произведение двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$, лежащих не единичной окружности, тогда и только тогда равно i, когда $c = b$ и $d = a$, то есть когда $c + di = b + ai$.

Доказательство. Так как оба числа находятся на единичной окружности, то $a^2+b^2 = 1$ и $c^2+d^2 = 1$. Очевидно, $(a+bi)\cdot(b+ai) = (a^2+b^2)\cdot i = i$. Обратно, из условия $(a + bi) \cdot (c + di) = i$ следует

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 1 \end{cases}$$

Умножив втрое равенство на c и воспользовавшись тем, что $ac = bd$ из первого равенства, получим $acd + bc^2 = bd^2 + bc^2 = b(d^2 + c^2) = b = c$.

Теперь, подставив c вместо b в первой равенство, находим $a = d$. Что и требовалось доказать.

Согласно лемме 1, если число z лежит на единичной окружности, то для того чтобы получить i в произведении его с другим числом, достаточно его умножить на $w = Im(z) + Re(z)i$.

Это понятно и с геометрической точки зрения: если $z = e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi \leq \pi)$, то $w = e^{(\frac{\pi}{2}-\varphi)\cdot i}$ и $z \cdot w = e^{\frac{\pi}{2}i} = cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{2}) = i$

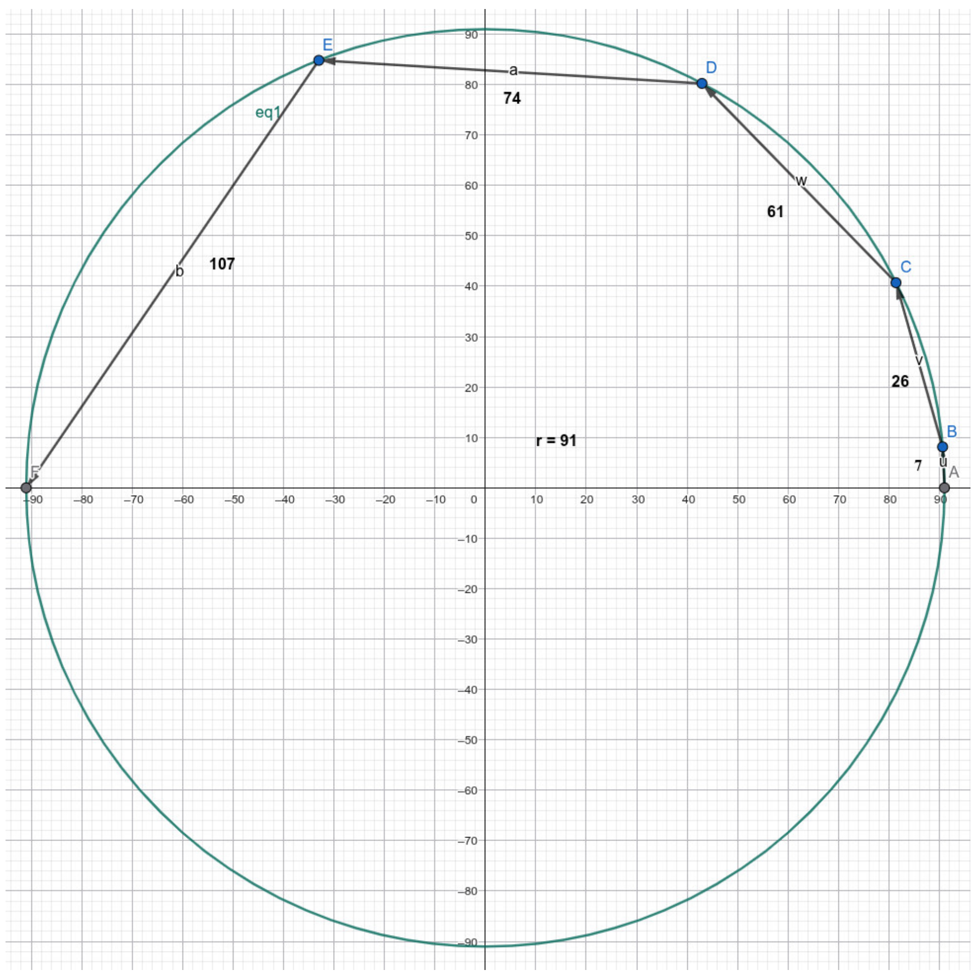
Следствие. Для того чтобы получить число i в результате умножения трех комплексных чисел, лежащих на единичной окружности достаточно произведение двух чисел $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$ домножить на $Im(z_1 \cdot z_2) + Re(z_1 \cdot z_2) = ad + bc + (ac - bd)i$. То есть, выбрать в качестве третьего число $z_3 = ad + bc + (ac - bd)i$. И, в общем случае,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = i <=> z_n = Im(\prod_{k=1}^{n-1} z_k) + Re(\prod_{k=1}^{n-1} z_k)$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 1.

Лемма 2. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n, r$ - натуральные числа, такие, что $a_1 + a_2 + ... + a_n < \pi r$. Если произведение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$, определенных по формуле (3), равно i, то в окружность радиуса r может быть вписан $(n+1)$-угольник со сторонами $a_1, a_2, ..., a_n, 2r$.

Доказательство. Если последовательно откладывать на окружности с радиусом r звенья длиной $a_1, a_2, ..., a_n$, то мы получим вписанную ломаную, начало и конец которой находятся на противоположных концах диаметра окружности.



На рисунке приведен реальный пример такой ломаной с длинами звеньев {7,26,61,74,107} на окружности радиуса 91.

Мы будем говорить, что ломаная вписана в половину окружности, когда ее начало и конец находятся на противоположных концах диаметра окружности..

Действительно, для подобной ломаной в формуле (2) сумма арксинусов будет равна $\frac{\pi}{2}$ и формула (4) будет иметь вид $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = i$

Добавляя к такой ломаной еще одно звено равное диаметру окружности, получаем вписаный $(n+1)$-угольник со сторонами $a_1, a_2, ..., a_n, 2r$. Что и требовалось доказать.

Для примера на рисунке получаем: $z_1 = \sqrt{1 - \frac{49}{4 \cdot 91^2}} + i \cdot \frac{7}{2 \cdot 91} = \frac{105\sqrt{3}+7i}{2 \cdot 91}$,

$$z_2 = \frac{104\sqrt{3}+26i}{2 \cdot 91}, z_3 = \frac{99\sqrt{3}+61i}{2 \cdot 91}, z_4 = \frac{96\sqrt{3}+74i}{2 \cdot 91}, z_5 = \frac{85\sqrt{3}+107i}{2 \cdot 91}$$

И можно убедиться, что $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = i$. Ключевым фактором здесь является тот факт, что во всех числах в действительной части находится один и тот же радикал $\sqrt{3}$. Поэтому оказалось возможным сворачивание произведения к i.

Предположение. Условие $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = i$ для комплексных чисел (3) таких, что $a_k < 2r, k = 1, 2, ..., n$, выполняется тогда и только тогда, когда те радикалы в формуле (3), которые не извлекаются, имеют под корнем одну и ту же неизвлекаемую часть.

Заметим, что при перемножении двух чисел с одинаковым корнем в действительной части и целой мнимой частью этот корень перемещается во мнимую часть.

Например, $(105\sqrt{3}+7i) \cdot (104\sqrt{3}+26i) = 7 \cdot (15\sqrt{3}+i) \cdot 26 \cdot (4\sqrt{3}+i)) = 2 \cdot 91 \cdot (179 + 19\sqrt{3} \cdot i)$.

А уже при следующем умножении на число с корнем в действительной части, он возвращается обратно в действительную часть: $2 \cdot 91 \cdot (179 + 19\sqrt{3} \cdot i) \cdot (99\sqrt{3} + 61 \cdot i) = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 91 \cdot (\sqrt{3}+i)$.

Из этого наблюдения можно сделать вывод, что для получения i при перемножении комплексных чисел (3) их должно быть нечетное количество большее 1, в том случае, когда в действительной части все эти числа содержат один и тот же корень (в соответствии с предположением).

Последнее число z_n из (3) всегда будет иметь корень в действительной части (в предположении, что этот корень есть в действительной части у всех чисел $z_k, k = 1, 2, ..., n$), значит в соответствии со следствием из леммы 1, произведение $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_{n-1}$ должно иметь корень в мнимой части, то есть $n-1$ должно быть четным.

То есть, ломаную с четным числом целочисленных звеньев можно вписать в половину окружности целого радиуса только в том случае, если в действительных частях чисел (3) не будет корней (все они извлекутся до целого, если верно наше предположение).

Теорема. Пусть a, b, c, r - натуральные числа. Ломаную с тремя звеньями, длины которых равны a, b, c, можно вписать в половину окружности тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$r \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + a \cdot b \cdot c = 4 \cdot r^3 \tag{5}$$

Доказательство. Условие теоремы эквивалентно выполнению равенства:

$$(\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} + \frac{a}{2r}i) \cdot (\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + \frac{b}{2r}i) \cdot (\sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}} + \frac{c}{2r}i) = i$$

В соответствии со следствием из леммы 1, оно равносильно системе:

$$\begin{cases} (\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}) \cdot (\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}) - \frac{a \cdot b}{4r^2} = \frac{c}{2r} \\ \frac{a}{2r} \cdot (\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}) + \frac{b}{2r} \cdot (\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}) = \sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}} \end{cases} \tag{6}$$

Избавимся от корней в первом равенстве системы (6):

$$(1 - \frac{a^2}{4r^2}) \cdot (1 - \frac{b^2}{4r^2}) = (\frac{c}{2r} + \frac{ab}{4r^2})^2$$

Далее, умножим обе части последнего равенства на $(4r^2)^2$ и избавимся от дробей:

$$(4r^2 - a^2) \cdot (4r^2 - b^2) = (2cr + ab)^2$$

Раскроем скобки: $(4r^2)^2 - 4r^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 = 4c^2r^2 + 4abcr + a^2b^2$. Отсюда:

$$(4r^2)^2 = 4r^2(a^2 + b^2 + c^2) + 4rabc$$

и, после сокращения на $4r$, получаем равенство (5):

$$4r^3 = r(a^2 + b^2 + c^2) + abc$$

Можно проверить, что второе уравнение системы (6), приводит к тому же равенству (5). Достаточно возвести в квадрат обе его части и заменить произведение корней в левой части, выразив его из первого уравнения.

После преобразований, мы получим то же самое равенство (5). Таким образом, второе уравнение в системе (6) избыточно и она эквивалентна равенству (5). Что и требовалось доказать.

3. Алгоритмы и программы

Из результатов предыдущего параграфа следует, что для получения целочисленного многоугольника, вписанного в окружность целого радиуса, можно найти две ломаные, вписанные в половину окружности, и совместить их так, чтобы начала и концы совпадали.

В принципе, порядок длин звеньев ломаной или сторон многоугольника для построения не имеет значения. Мы будем всегда приводить их в возрастающем порядке. И будем искать только те многоугольники или ломаные, у которых нет одинаковых сторон.

Итак, алгоритм нахождения требуемых многоугольников следующий:

Для небольшого количества сторон (до 5) и небольших радиусов (до 100) можно вычислить все возможные случаи полным перебором.

При этом, произведение (4) вычисляется приближенно с большой точностью (в программах ниже, до 10^{-50}). Для избежания возможных ошибок, из-за приближенных вычислений, проводится дополнительная проверка.

Альтернативный вариант: для выбранного радиуса r, ищем ломаные вписанные в половину окружности и, затем, комбинируем их друг с другом, создавая многоугольники.

Для ломаных из трех звеньев используем равенство (5) и это отличный способ получать шестиугольники. Дополнтельные проверки не требуются, так как в (5) не используются приближенные вычисления.

Для получения, вписанных в половину окружности, ломаных с 5-тью и 7-мью звеньями были разработаны оригинальные алгоритмы и программы для того, чтобы избежать полного перебора.

Для выбранного радиуса r, ломаные с тремя, пятью и семью звеньями, позволяют нам строить целочисленные циклические многоугольники, имеющие $4, 6, 8, 10, 12$ и 14 сторон.

Программы на языке Julia

```
# l - массив длин сторон многоугольника, r - радиус окружности
function isgon0(r,l) # проверка через арксинусы
  p = 4*atan(big(1))
  s = sum(map(x -> asin(big(x)/(2*r)), l))
  abs(s-p) < big(10)^(-50)
end

function isgon(r,l) # проверка через произведение
  sum(l)<2*pi*r || return false
  m = big(10)^(-50)
  a = map(x -> big(x)/(2*r), l)
  z = prod(map(x -> sqrt(1-x^2)+x*im,a))
  abs(real(z)+1)<m&&abs(imag(z))<m
end

function listgon(r,n) # список многоугольников
  res = Vector{Vector{Int64}}()
  for x in combinations(1:2*r, n)
    if isgon(r,x) push!(res,x) end
  end
  res
end

# l - массив длин звеньев ломаной, r - радиус окружности
function isline0(r,l) # проверка через арксинусы
  p = 4*atan(big(1))/2
  s = sum(map(x -> asin(big(x)/(2*r)), l))
  abs(s-p) < big(10)^(-50)
end
```

```
function isline(r,l) # проверка через произведение
  sum(l)<pi*r || return false
  m = big(10)^(-50)
  a = map(x -> big(x)/(2*r), l)
  z = prod(map(x -> sqrt(1-x^2)+x*im,a))
  abs(real(z))<m&&abs(imag(z)-1)<m
end

#r - радиус окружности, точные вычисления
function listline3(r) # список всех ломаных из 3 звеньев для радиуса r
  res = Vector{Vector{Int64}}()
  for x in combinations(1:2*r-1, 3)
    a = x[1]; b =x[2]; c = x[3]
    if r*(a^2+b^2+c^2)+a*b*c==4*r^3
      push!(res,x)
    end
  end
  res
end

#r - радиус окружности, приближенные вычисления
function listline(r,k) # список всех ломаных из k звеньев для радиуса r
  res = Vector{Vector{Int64}}()
  for x in combinations(1:2*r-1, k-1)
    c = map(x -> big(x)/(2*r), x)
    z = prod(map(x -> sqrt(1-x^2)+x*im,c))
    u = BigInt(floor(real(z)*2*r))
    if u>x[end]
      push!(x,u)
      if isline(r,x)
        push!(res,x)
      end
    end
  end
  res
end
```

При помощи функции $listline3(r)$ для всех радиусов $r \leq 1000$ были найдены, вписанные в половину окружности, ломаные из трех звеньев.

```
julia> for r in 5:1000
         l = listline3(r)
         if length(l)>0 println((r,l)) end
       end

(7, [[2, 7, 11]])
(8, [[2, 9, 12]])
(13, [[1, 13, 22]])
(14, [[4, 14, 22]])
(15, [[3, 14, 25]])
(16, [[4, 18, 24], [8, 17, 22]])
(19, [[11, 19, 26]])
(21, [[6, 21, 33], [12, 22, 28]])
(22, [[12, 19, 33]])
(24, [[6, 27, 36]])
(26, [[2, 26, 44]])
(27, [[10, 21, 45]])
(28, [[8, 28, 44]])
(30, [[6, 28, 50]])
(31, [[13, 31, 46]])
(32, [[8, 36, 48], [16, 34, 44]])
(33, [[11, 39, 46], [22, 34, 42]])
(34, [[17, 28, 53]])
(35, [[6, 25, 63], [10, 35, 55], [14, 38, 50]])
(36, [[3, 26, 66]])
(37, [[26, 37, 47]])
(38, [[19, 44, 49], [22, 38, 52]])
(39, [[3, 39, 66], [13, 43, 57]])
(40, [[10, 45, 60], [28, 41, 50]])
(42, [[12, 42, 66], [24, 44, 56]])
(43, [[22, 43, 61]])
(44, [[10, 55, 62], [11, 24, 81], [11, 38, 74], [24, 38, 66]])
(45, [[9, 35, 79], [9, 42, 75], [35, 42, 57]])
(46, [[23, 43, 68], [29, 36, 69]])
(48, [[12, 54, 72], [24, 51, 66]])
```

```
(49, [[14, 23, 91], [14, 49, 77], [23, 49, 71]])
(51, [[6, 34, 94], [17, 38, 87]])
(52, [[4, 52, 88], [6, 39, 94]])
(54, [[20, 42, 90]])
(55, [[2, 44, 100], [15, 34, 99], [22, 50, 86], [25, 59, 77]])
(56, [[4, 62, 91], [7, 58, 92], [14, 63, 84], [16, 56, 88], [42, 57, 68]])
...
(997, [[407, 997, 1487]])
(998, [[52, 998, 1702], [191, 499, 1876], [596, 813, 1497]])
(999, [[54, 814, 1802], [62, 783, 1813], [74, 906, 1746],
      [111, 706, 1827], [111, 909, 1726], [370, 675, 1723],
      [370, 777, 1665], [444, 1074, 1404], [477, 675, 1665],
      [477, 777, 1602], [498, 888, 1512], [603, 882, 1443],
      [654, 927, 1369], [675, 777, 1470], [702, 999, 1269]])
(1000,[[25, 420, 1950], [28, 550, 1915], [80, 548, 1900],
      [80, 700, 1844], [80, 1025, 1675], [80, 1250, 1510],
      [100, 1325, 1430], [116, 430, 1925], [185, 850, 1724],
      [187, 890, 1700], [250, 1125, 1500], [275, 1220, 1402],
      [310, 464, 1850], [310, 625, 1780], [380, 1150, 1388],
      [425, 1104, 1395], [450, 1100, 1380], [464, 625, 1703],
      [530, 944, 1450], [548, 700, 1610], [548, 1159, 1250],
      [555, 628, 1650], [560, 704, 1600], [650, 940, 1364],
      [695, 900, 1362], [700, 1025, 1250]])
```

Функция $listline(r, k)$ хорошо работает для небольших значений радиуса и маленьких k (k - число звеньев ломаной), но уже при $k = 5$ с трудом добирается до первых случаев ломаных из пяти звеньев, вписанных в половину окружности. Минимальное r здесь, как увидим далее, 91.

А для $k = 7$ с ее помощью вообще ничего найти невозможно. Поэтому был разработан алгоритм, основанный на, сформулированном выше недоказанном предположении, что для получения в произведении i, все корни $\sqrt{4r^2 - a_k^2}, k = 1, 2, ..., n$ в действительных частях комплексных чисел (3) обязаны иметь одинаковую неизвлекаемую часть.

Следующая функция, для заданного радиуса r и натурального числа a, вычисляет неизвлекаемую часть корня $\sqrt{4r^2 - a^2}$.

```
function rem(a)
  res = 1
  for (p,k) in factor(4*r^2 - a^2)
    if k%2==1 res*=p end
  end
  res
end
```

То есть, возвращает то, что останется под корнем после извлечения всех множителей-квадратов. Если корень извлечется полностью она вернет 1.

Приведем программу для нахождения, вписанных в половину окружности, ломаных с пятью звеньями (для семи звеньев все аналогично):

```
function listline5(r) # список ломаных из 5 звеньев для радиуса r
  res = Vector{Vector{Int64}}()
  a1 = 1
  while a1<2*r-5
    a11 = rem(a1)
    a2 = a1+1
    while a2<2*r-4
      a21 = rem(a2)
      while a11!=a21&&a2<2*r-4
        a2+=1
        a21 = rem(a2)
      end
      if a11==a21
        a3 = a2+1
        while a3<2*r-3
          a31 = rem(a3)
          while a21!=a31&&a3<2*r-3
            a3+=1
            a31 = rem(a3)
          end
```

```
          if a21==a31
            a4 = a3+1
            while a4<2*r-2
              a41 = rem(a4)
              while a31!=a41&&a4<2*r-2
                a4+=1
                a41 = rem(a4)
              end
              if a31==a41
                a5 = a4+1
                while a5<2*r-1
                  a51 = rem(a5)
                  while a41!=a51&&a5<2*r-1
                    a5+=1
                    a51 = rem(a5)
                  end
                  if a41==a51
                    a = [a1,a2,a3,a4,a5]
                    if isline(r,a)
                      push!(res, a)
                    end
                  end
                  a5+=1
                end
              end
              a4+=1
            end
          end
          a3+=1
        end
      end
      a2+=1
    end
    a1+=1
  end
  res
end
```

Список, вписанных в половину окружности, ломаных из пяти звениев, для всех $r \leq 1000$, полученный при помощи этой программы:

```
(91, [[7, 26, 61, 74, 107]])
(133, [[23, 38, 77, 97, 166]])
(176, [[9, 44, 96, 152, 226]])
(182, [[14, 52, 122, 148, 214]])
(217, [[62, 73, 91, 191, 242]])
(220, [[50, 89, 154, 184, 197]])
(232, [[58, 103, 114, 212, 222]])
(247, [[19, 94, 131, 143, 347]])
(259, [[11, 74, 157, 182, 349]])
(266, [[46, 76, 154, 194, 332]])
(273, [[21, 78, 183, 222, 321]])
(301, [[73, 86, 154, 239, 359]])
(304, [[68, 118, 152, 233, 352]])
(325, [[72, 160, 182, 250, 330]])
(345, [[14, 69, 190, 322, 437]])
(352, [[18, 88, 137, 354, 452], [18, 88, 192, 304, 452],
      [88, 137, 192, 304, 354]])
(360, [[6, 125, 176, 300, 470], [6, 125, 176, 363, 414]])
(364, [[28, 104, 244, 296, 428]])
(368, [[14, 131, 236, 344, 391], [92, 111, 232, 288, 398]])
(399, [[69, 114, 231, 291, 498]])
(403, [[31, 169, 218, 277, 517]])
(425, [[130, 174, 238, 360, 400]])
(434, [[124, 146, 182, 382, 484]])
(440, [[100, 178, 308, 368, 394]])
(441, [[98, 132, 252, 398, 462]])
(455, [[35, 130, 305, 370, 535]])
(464, [[116, 206, 228, 424, 444]])
(465, [[50, 93, 226, 434, 589]])
(468, [[39, 168, 214, 338, 637]])
(469, [[91, 134, 262, 431, 506]])
(481, [[37, 121, 194, 338, 719]])
(483, [[6, 244, 276, 406, 534]])
(484, [[121, 264, 282, 401, 418]])
(494, [[38, 188, 262, 286, 694]])
```

```
(511, [[61, 146, 322, 347, 659]])
(518, [[22, 148, 314, 364, 698]])
(528, [[27, 132, 288, 456, 678]])
(532, [[92, 152, 308, 388, 664]])
(536, [[111, 134, 372, 386, 622]])
(544, [[88, 127, 272, 412, 727], [88, 127, 412, 448, 578]])
(546, [[42, 156, 366, 444, 642]])
(553, [[77, 158, 338, 481, 622]])
(559, [[43, 251, 286, 334, 757]])
(560, [[120, 252, 275, 500, 562]])
(561, [[93, 187, 247, 418, 737]])
(567, [[76, 126, 366, 556, 594]])
(585, [[78, 202, 274, 330, 846]])
(589, [[22, 247, 341, 503, 671]])
(592, [[148, 216, 337, 498, 608]])
(595, [[7, 102, 349, 425, 867]])
(602, [[146, 172, 308, 478, 718]])
(608, [[136, 236, 304, 371, 784], [136, 236, 304, 466, 704],
      [136, 236, 371, 466, 646]])
(616, [[44, 218, 304, 449, 826]])
(627, [[98, 154, 282, 418, 902]])
(637, [[49, 182, 299, 313, 1001],
      [49, 182, 299, 427, 923], [49, 182, 299, 637, 749],
      [49, 182, 313, 427, 913], [49, 182, 313, 518, 842],
      [49, 182, 407, 427, 842], [49, 182, 427, 518, 749],
      [49, 299, 313, 407, 842], [49, 299, 313, 427, 826],
      [49, 299, 313, 518, 749], [49, 299, 407, 427, 749],
      [49, 313, 427, 518, 637], [182, 299, 313, 518, 637],
      [182, 299, 407, 427, 637], [299, 313, 407, 427, 518]])
(638, [[93, 124, 348, 583, 772]])
(650, [[144, 320, 364, 500, 660]])
(651, [[186, 219, 273, 573, 726]])
(660, [[150, 267, 462, 552, 591]])
(663, [[46, 221, 354, 494, 871]])
(665, [[115, 190, 385, 485, 830]])
(675, [[19, 135, 250, 267, 1185], [19, 135, 250, 630, 954],
      [19, 250, 267, 509, 954], [19, 250, 267, 630, 855],
      [135, 250, 267, 525, 855], [135, 250, 267, 630, 762],
```

```
      [135, 267, 509, 525, 630]])
(679, [[14, 194, 491, 517, 829]])
(688, [[24, 172, 318, 647, 892]])
(690, [[28, 138, 380, 644, 874]])
(696, [[174, 309, 342, 636, 666]])
(702, [[252, 277, 321, 507, 783]])
(704, [[36, 176, 274, 517, 1056], [36, 176, 274, 708, 904],
      [36, 176, 384, 608, 904], [36, 176, 517, 608, 792],
      [36, 274, 384, 517, 904], [36, 274, 517, 608, 708],
      [176, 274, 384, 517, 792], [176, 274, 384, 608, 708]])
(715, [[70, 325, 406, 682, 695]])
(720, [[12, 250, 352, 600, 940], [12, 250, 352, 726, 828]])
(721, [[206, 259, 286, 674, 767]])
(725, [[170, 240, 406, 666, 728]])
(728, [[56, 208, 488, 592, 856], [84, 169, 304, 466, 1104],
      [84, 169, 304, 741, 884], [169, 304, 466, 546, 741]])
(736, [[28, 262, 472, 688, 782], [103, 184, 222, 796, 894],
      [103, 184, 464, 576, 894], [184, 222, 464, 576, 796]])
(741, [[57, 282, 393, 429, 1041]])
(744, [[62, 246, 361, 766, 812]])
(763, [[74, 218, 497, 502, 997]])
(777, [[33, 222, 471, 546, 1047]])
(784, [[182, 237, 412, 588, 952]])
(793, [[61, 142, 263, 611, 1223]])
(795, [[159, 215, 259, 742, 1007]])
(798, [[138, 228, 462, 582, 996]])
(800, [[64, 155, 350, 560, 1208], [64, 155, 350, 820, 1000]])
(805, [[71, 138, 413, 575, 1173]])
(806, [[62, 338, 436, 554, 1034]])
(819, [[63, 234, 549, 666, 963]])
(845, [[232, 246, 416, 650, 1014]])
(848, [[109, 226, 616, 724, 901]])
(850, [[260, 348, 476, 720, 800]])
(856, [[137, 214, 556, 654, 1026]])
(861, [[28, 278, 698, 708, 902]])
(868, [[248, 292, 364, 764, 968]])
(871, [[67, 169, 659, 781, 958]])
(880, [[45, 220, 480, 760, 1130], [200, 356, 385, 437, 1240],
```

```
      [200, 356, 385, 616, 1100], [200, 356, 437, 788, 902],
      [200, 356, 616, 736, 788], [356, 385, 437, 616, 902],
      [356, 385, 437, 736, 788]])
(882, [[196, 264, 504, 796, 924]])
(884, [[102, 338, 437, 877, 927]])
(885, [[89, 177, 582, 903, 925]])
(891, [[18, 246, 374, 918, 1106], [67, 297, 522, 753, 1053]])
(903, [[116, 354, 434, 516, 1266], [219, 258, 462, 717, 1077]])
(904, [[114, 226, 558, 719, 1108]])
(910, [[70, 260, 610, 740, 1070]])
(912, [[204, 354, 456, 699, 1056]])
(925, [[86, 518, 570, 600, 1040]])
(928, [[232, 412, 456, 848, 888]])
(930, [[100, 186, 452, 868, 1178]])
(931, [[13, 161, 266, 539, 1606], [13, 161, 266, 679, 1526],
      [13, 161, 266, 931, 1349], [13, 161, 266, 1021, 1274],
      [13, 161, 539, 679, 1349], [13, 161, 679, 931, 1021],
      [13, 266, 437, 679, 1349], [13, 266, 539, 679, 1274],
      [13, 266, 679, 838, 1021], [161, 266, 437, 539, 1349],
      [161, 266, 437, 931, 1021], [161, 266, 539, 679, 1162],
      [161, 266, 539, 838, 1021], [161, 437, 539, 679, 1021],
      [266, 437, 539, 679, 931]])
(935, [[11, 255, 578, 939, 1037], [34, 188, 370, 748, 1394]])
(936, [[48, 333, 503, 598, 1302], [78, 336, 428, 676, 1274],
      [78, 336, 428, 911, 1072]])
(938, [[182, 268, 524, 862, 1012]])
(946, [[33, 317, 709, 817, 996]])
(949, [[73, 311, 454, 598, 1369]])
(952, [[144, 221, 364, 846, 1264], [144, 221, 364, 969, 1156],
      [144, 221, 714, 846, 969]])
(962, [[74, 242, 388, 676, 1438]])
(966, [[12, 488, 552, 812, 1068]])
(968, [[87, 242, 528, 802, 1243], [87, 242, 528, 836, 1214],
      [87, 242, 564, 802, 1214], [242, 528, 564, 802, 836]])
(973, [[154, 278, 577, 863, 1079]])
(975, [[216, 480, 546, 750, 990]])
(976, [[8, 488, 583, 938, 952]])
(984, [[82, 286, 516, 841, 1232]])
```

```
(988, [[76, 376, 524, 572, 1388]])
(992, [[64, 496, 539, 904, 1016]])
```

К сожалению, при помощи аналогичной программы, для $r \leq 1000$ не нашлось ни одной ломаной из семи звеньев, вписанных в половину окружности. Пришлось поискать дальше, до $r \leq 3000$.

```
(1292, [[61, 154, 209, 289, 646, 1064, 1496]])
(1729, [[133, 299, 386, 494, 649, 1261, 2033],
       [133, 299, 386, 494, 658, 1001, 2242],
       [133, 299, 386, 494, 658, 1583, 1729],
       [133, 299, 386, 494, 917, 1001, 2033],
       [133, 299, 386, 494, 917, 1342, 1729],
       [133, 299, 386, 494, 1001, 1261, 1729],
       [133, 299, 386, 494, 1159, 1261, 1583],
       [133, 299, 386, 494, 1261, 1342, 1406],
       [133, 299, 386, 658, 917, 1342, 1583],
       [133, 299, 386, 658, 1001, 1261, 1583],
       [133, 299, 386, 917, 1001, 1261, 1342],
       [133, 299, 494, 649, 658, 1001, 2033],
       [133, 299, 494, 649, 658, 1342, 1729],
       [133, 299, 494, 649, 1159, 1261, 1342],
       [133, 299, 494, 658, 1001, 1159, 1583],
       [133, 299, 494, 658, 1001, 1342, 1406],
       [133, 299, 494, 917, 1001, 1159, 1342],
       [133, 299, 649, 658, 1001, 1261, 1342],
       [133, 386, 494, 649, 658, 917, 2033],
       [133, 386, 494, 649, 658, 1261, 1729],
       [133, 386, 494, 658, 917, 1001, 1729],
       [133, 386, 494, 658, 917, 1159, 1583],
       [133, 386, 494, 658, 917, 1342, 1406],
       [133, 386, 494, 658, 1001, 1261, 1406],
       [133, 386, 494, 917, 1001, 1159, 1261],
       [133, 386, 649, 658, 917, 1261, 1342],
       [133, 494, 649, 658, 917, 1159, 1342],
       [133, 494, 649, 658, 1001, 1159, 1261],
       [299, 386, 494, 649, 658, 1261, 1583],
       [299, 386, 494, 649, 917, 1261, 1342],
```

```
        [299, 386, 494, 658, 917, 1001, 1583],
        [299, 494, 649, 658, 917, 1001, 1342],
        [386, 494, 649, 658, 917, 1001, 1261]])
(2024, [[2, 327, 506, 684, 1104, 1276, 2277],
        [2, 327, 506, 684, 1104, 1748, 1839],
        [2, 327, 506, 684, 1276, 1584, 1839],
        [2, 327, 684, 1006, 1104, 1276, 1839]])
(2584, [[122, 308, 418, 578, 1292, 1447, 3553],
        [122, 308, 418, 578, 1292, 2128, 2992],
        [122, 308, 418, 578, 1447, 2228, 2767],
        [122, 308, 418, 1292, 1447, 2128, 2228],
        [308, 418, 578, 1003, 1292, 2128, 2228]])
(2816, [[144, 704, 1096, 1257, 1536, 1914, 2068]])
(2821, [[166, 217, 599, 806, 949, 2483, 3317],
        [166, 217, 599, 806, 1526, 1939, 3317],
        [166, 217, 599, 806, 1526, 2483, 2821],
        [166, 217, 599, 1526, 1754, 1939, 2483],
        [166, 217, 806, 949, 1183, 1526, 3658],
        [166, 217, 806, 949, 1183, 1939, 3317],
        [166, 217, 806, 949, 1183, 2483, 2821],
        [166, 217, 806, 949, 1526, 2161, 2821],
        [166, 217, 806, 949, 1754, 1939, 2821],
        [166, 217, 806, 949, 1754, 2294, 2483],
        [166, 217, 806, 949, 1891, 2161, 2483],
        [166, 217, 806, 1183, 1526, 1939, 2821],
        [166, 217, 806, 1183, 1526, 2294, 2483],
        [166, 217, 806, 1183, 1891, 1939, 2483],
        [166, 217, 806, 1526, 1754, 1939, 2294],
        [166, 217, 806, 1526, 1891, 1939, 2161],
        [166, 217, 949, 1183, 1526, 2161, 2483],
        [166, 217, 949, 1183, 1754, 1939, 2483],
        [166, 217, 949, 1526, 1754, 1939, 2161],
        [166, 599, 806, 949, 1526, 2161, 2483],
        [166, 599, 806, 949, 1754, 1939, 2483],
        [166, 599, 806, 1183, 1526, 1939, 2483],
        [166, 806, 949, 1183, 1526, 1939, 2161],
        [217, 599, 806, 949, 1183, 1526, 3317],
        [217, 599, 806, 949, 1526, 1754, 2821],
```

```
    [217, 599, 806, 949, 1754, 1891, 2483],
    [217, 599, 806, 1183, 1526, 1891, 2483],
    [217, 599, 806, 1526, 1754, 1891, 1939],
    [217, 599, 949, 1183, 1526, 1754, 2483],
    [217, 806, 949, 1183, 1526, 1754, 2294],
    [217, 806, 949, 1183, 1526, 1891, 2161],
    [217, 806, 949, 1183, 1754, 1891, 1939],
    [599, 806, 949, 1183, 1526, 1754, 1939]])
```

Удивительным образом, знаменитое число 1729 (число-такси, число Рамануджана) присутствует в последнем списке. В математике все как-то связано, вот только понять эту связь очень непросто.

4. Примеры многоугольников

Прямоугольные треугольники с гипотенузой на диаметре, легко строить, используя пифагоровы тройки: $a_1^2 + a_2^2 = 4r^2$.

```
r = 5: [6, 8, 10]
r = 13: [10, 24, 26]
r = 15: [18, 24, 30]
r = 17: [16, 30, 34]
r = 25: [14, 48, 50], [30, 40, 50]
...
```

Примеры не прямоугольных треугольников, у которых длины всех сторон $< 2r$:

```
r = 65: [78, 120, 126], [104, 112, 120]
r = 85: [102, 150, 168], [136, 150, 154]
```

В этом случае, в записи комплексных чисел z_1, z_2, z_3 вообще нет корней (они извлекаются) и произведение $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -1$, благодаря формуле $(a + bi) \cdot (-a + bi) = -(a^2 + b^2) = -1$

Четырехугольники, содержащие диаметр в качестве стороны, можно легко создавать на основе ломаных из трех звеньев, вписанных в половину окружности, согласно лемме 2.

Каждой такой ломаной соответствует один четырехугольник со стороной $2r$. Вот как выглядит начало списка:

```
r = 7: [2, 7, 11, 14]
r = 8: [2, 9, 12, 16]
r = 13: [1, 13, 22, 26]
r = 14: [4, 14, 22, 28]
r = 15: [3, 14, 25, 30]
r = 16: [4, 18, 24, 32], [8, 17, 22, 32]
к = 19: [11, 19, 26, 38]
r = 21: [6, 21, 33, 42], [12, 22, 28, 42]
r = 22: [12, 19, 33, 44]
r = 24: [6, 27, 36, 48])
r = 26: [2, 26, 44, 52]
r = 27: [10, 21, 45, 54]
r = 28: [8, 28, 44, 56]
r = 30: [6, 28, 50, 60]
r = 31: [13, 31, 46, 62]
r = 32: [8, 36, 48, 64] [16, 34, 44, 64]
r = 33: [11, 39, 46, 66], [22, 34, 42, 66]
r = 34: [17, 28, 53, 68]
r = 35: [6, 25, 63, 70], [10, 35, 55, 70], [14, 38, 50, 70]
...
```

Существуют ли четырехугольники, у которых длины всех сторон $< 2r$? Да, конечно, вот примеры:

```
r = 32: [8, 36, 57, 62], [16, 34, 56, 61]
r = 40: [28, 41, 67, 76]
r = 44: [11, 66, 74, 81], [24, 38, 74, 87]
r = 45: [35, 42, 75, 86], [35, 57, 75, 79]
r = 50: [28, 60, 80, 96]
```

В каждом из этих примеров во всех числах z_1, z_2, z_3, z_4 в действительной части содержится одинаковый корень, однако в конце он исчезает благодаря все тому же тождеству: $(a + bi) \cdot (-a + bi) = -(a^2 + b^2) = -1$.

Рассмотрим теперь пятиугольники:

```
r = 13: [1, 10, 13, 22, 24]
r = 15: [3, 14, 18, 24, 25]
r = 26: [2, 20, 26, 44, 48]
r = 30: [6, 28, 36, 48, 50]
r = 34: [17, 28, 32, 53, 60]
r = 35: [6, 25, 42, 56, 63], [10, 35, 42, 55, 56], [14, 38, 42, 50, 56]
r = 37: [24, 26, 37, 47, 70]
r = 39: [3, 30, 39, 66, 72], [13, 30, 43, 57, 72]
r = 40: [10, 45, 48, 60, 64], [28, 41, 48, 50, 64]
r = 45: [9, 35, 54, 72, 79], [9, 42, 54, 72, 75], [35, 42, 54, 57, 72]
r = 51: [6, 34, 48, 90, 94], [17, 38, 48, 87, 90]
...
```

Они устроены так: ломаная из 3 звеньев, вписанная в половину окружности (произведение трех соответствующих чисел равно i) и два числа без радикалов $a + bi$ и $b + ai$, дающие в произведении еще одно i.

Например, для первого пятиугольника: $[1, 13, 22]$ ломаная, а остальные два числа равны $\frac{24}{26} + \frac{10}{26}i$ и $\frac{10}{26} + \frac{24}{26}i$.

Шестиугольники можно строить на основе ломаных из пяти звеньев, добавляя к ним диаметр:

```
r = 91: [[7, 26, 61, 74, 107, 182]
r = 133: [23, 38, 77, 97, 166, 266]
r = 176: [9, 44, 96, 152, 226]
r = 182: [14, 52, 122, 148, 214]
...
```

Более общий случай построения шестиугольников - комбинировать по две различные ломаные из трех звеньев для одного и того же радиуса, вписанные в половину окружности.

```
r = 16: [4, 8, 17, 18, 22, 24]
r = 21: [6, 12, 21, 22, 28, 33]
r = 33: [11, 22, 34, 39, 42, 46]
r = 35: [6, 10, 25, 35, 55, 63], [6, 14, 25, 38, 50, 63],
```

```
        [10, 14, 35, 38, 50, 55]
r = 38: [19, 22, 38, 44, 49, 52]
r = 39: [3, 13, 39, 43, 57, 66]
r = 40: [10, 28, 41, 45, 50, 60]
r = 42: [12, 24, 42, 44, 56, 66]
r = 44: [10, 11, 24, 55, 62, 81], [10, 11, 38, 55, 62, 74],
        [10, 24, 38, 55, 62, 66]
r = 46: [23, 29, 36, 43, 68, 69]
r = 48: [12, 24, 51, 54, 66, 72]
r = 51: [6, 17, 34, 38, 87, 94]
r = 52: [4, 6, 39, 52, 88, 94]
r = 55: [2, 15, 34, 44, 99, 100], [2, 22, 44, 50, 86, 100],
        [2, 25, 44, 59, 77, 100], [15, 22, 34, 50, 86, 99],
        [15, 25, 34, 59, 77, 99], [22, 25, 50, 59, 77, 86]
r = 56: [4, 7, 58, 62, 91, 92], [4, 14, 62, 63, 84, 91],
        [4, 16, 56, 62, 88, 91], [4, 42, 57, 62, 68, 91],
        [7, 14, 58, 63, 84, 92],[7, 16, 56, 58, 88, 92],
        [7, 42, 57, 58, 68, 92], [14, 16, 56, 63, 84, 88],
        [14, 42, 57, 63, 68, 84],[16, 42, 56, 57, 68, 88]
r = 57: [14, 33, 38, 57, 78, 102]
r = 62: [4, 26, 31, 62, 92, 119]
r = 63: [14, 18, 36, 63, 99, 116], [18, 36, 63, 66, 84, 99]
r = 64: [7, 16, 32, 72, 96, 122], [16, 32, 68, 72, 88, 96]
r = 65: [5, 32, 50, 65, 104, 110], [5, 50, 65, 66, 78, 110]
r = 66: [22, 36, 57, 78, 92, 99], [22, 44, 68, 78, 84, 92],
        [36, 44, 57, 68, 84, 99]
r = 68: [11, 26, 51, 56, 114, 119], [26, 34, 51, 56, 106, 114]
...
```

Существуют ли шестиугольники, которые невозможно получить описанными выше способами? Определенно существуют, поскольку мы конструировали только такие, у которых сторона или одна из диагоналей, при определенном порядке сторон, проходит через центр окружности.

Вот пример такого шестиугольника:

```
r = 91: [7, 26, 61, 118, 143, 154]
```

Соответствующие комплексные числа (3) для него равны:

$$z_1 = \frac{105\sqrt{3}}{182} + i\frac{7}{182}, z_2 = \frac{104\sqrt{3}}{182} + i\frac{26}{182}, z_3 = \frac{99\sqrt{3}}{182} + i\frac{61}{182}, z_4 = \frac{80\sqrt{3}}{182} + i\frac{118}{182},$$

$$z_5 = \frac{65\sqrt{3}}{182} + i\frac{143}{182}, z_6 = \frac{56\sqrt{3}}{182} + i\frac{154}{182}$$

Имеем, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ и $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 = -1$

Можно убедиться, что никакие тройки z в произведении не дадут i, то есть этот шестиугольник невозможно составить из двух трехзвенных ломаных, вписанных в половину окружности.

Восьмиугольники на диаметре строятся на основе, вписанных в полуокружность ломаных, из 7 звеньев.

```
r = 1292: [61, 154, 209, 289, 646, 1064, 1496, 2584]
r = 1729: [133, 299, 386, 494, 649, 1261, 2033, 3458]
...
```

А также, как две состыкованные, вписанные в полуокружность, ломаные 3-х и 5-ти звеньев.

```
r = 91: [7, 26, 42, 61, 74, 78, 107, 142]
r = 133: [14, 23, 38, 77, 97, 114, 166, 234],
         [23, 38, 58, 77, 84, 97, 166, 228],
         [23, 38, 77, 97, 112, 134, 152, 166]
r = 176: [9, 14, 44, 96, 136, 152, 226, 319],
         [9, 22, 44, 96, 107, 152, 226, 328],
         [9, 40, 44, 96, 152, 220, 226, 248],
         [9, 44, 88, 96, 152, 187, 226, 242]
r = 182: [14, 21, 52, 76, 122, 148, 214, 351],
         [14, 21, 52, 122, 148, 214, 221, 276],
         [14, 52, 84, 122, 148, 156, 214, 284]
...
```

Десятиугольники. Ломаные $5+5$ звеньев:

```
r = 368: [14, 92, 111, 131, 232, 236, 288, 344, 391, 398]
r = 728: [56, 84, 169, 208, 304, 466, 488, 592, 856, 1104],
         [56, 84, 169, 208, 304, 488, 592, 741, 856, 884],
         [56, 169, 208, 304, 466, 488, 546, 592, 741, 856]
...
```

Или ломаные $3+7$ звеньев:

```
r = 1292: [19, 61, 154, 209, 289, 646, 1064, 1496, 1526, 2074],
          [61, 76, 154, 209, 289, 646, 1064, 1156, 1496, 2276],
          [61, 134, 154, 209, 285, 289, 646, 1064, 1496, 2550],
          [61, 152, 154, 209, 289, 646, 1016, 1064, 1496, 2312],
          [61, 154, 209, 238, 289, 646, 1064, 1234, 1496, 2147],
          [61, 154, 209, 266, 289, 527, 646, 1064, 1496, 2462],
          [61, 154, 209, 289, 296, 646, 1064, 1496, 1596, 1836],
          [61, 154, 209, 289, 391, 646, 778, 1064, 1496, 2318],
          [61, 154, 209, 289, 456, 646, 1064, 1224, 1496, 2024],
          [61, 154, 209, 289, 494, 646, 969, 1064, 1496, 2166],
          [61, 154, 209, 289, 646, 680, 1064, 1496, 1520, 1616],
          [61, 154, 209, 289, 646, 748, 1064, 1292, 1496, 1768],
          [61, 154, 209, 289, 646, 816, 1064, 1368, 1496, 1648],
          [61, 154, 209, 289, 646, 874, 1064, 1394, 1496, 1576],
          [61, 154, 209, 289, 646, 984, 1064, 1207, 1496, 1653]
...
```

Двенадцатиугольники можно строить аналогично из ломаных 5-ти и 7-ми звеньев, а четырнадцатиугольники как $7+7$ звеньев.

Резюме

В результате проведенного исследования в данной работе, мы доказали несколько утверждений, описывающих требуемые условия нахождения целочисленных циклических многоугольников с целым радиусом описанной окружности, привели алгоритмы и программы для компьютера, а также множество примеров найденных многоугольников.

Ссылки

[1] R. H. Buchholz, J. A. MacDougall. Cyclic polygons with rational sides and area. J. Number Theory 128, 1 (2008), 17–48

[2] K. R. S. Sastry. Construction of Brahmagupta n-gons. Forum Geom. 5 (2005), 119–126

[3] Ajai Choudhry, Cyclic pentagons and hexagons with integer sides, diagonals and areas Serdica Math. J. 46 (2020), 307–322